



CONNAISSANCES GÉOMÉTRIQUES ET CONNAISSANCES SPATIALES DANS LES SITUATIONS DIDACTIQUES AVEC LA TECHNOLOGIE

Michela Maschietto UNIMORE, Italie

Sophie Soury-Lavergne IFE ENS de Lyon, France

EEDM 19, Paris août 2017

Plan

1. La géométrie dynamique

1.1 Les apprentissages de la géométrie avec la géométrie dynamique

1.2 Faire apprendre la géométrie avec la géométrie dynamique : qualité des ressources et formation des enseignants

2. La technologie et l'articulation du spatial et du géométrique

2.1 Articuler le spatial et le géométrique : l'espace graphique et les environnements numériques

2.2 Duo d'artefacts tangible et numérique pour apprendre et faire apprendre la géométrie

Conclusion sur de nouvelles questions pour la recherche en didactique



1. La géométrie dynamique

EIAH et Géométrie Dynamique

EIAH environnement informatique pour l'apprentissage humain

Domaine de recherche qui considère la technologie pas seulement comme un moyen de faire apprendre, mais aussi comme un moyen de concevoir et d'étudier les situations d'apprentissage et d'enseignement :
« Windows on mathematical meanings » (Hoyles et Noss 1996),
en particulier les processus de transposition des savoirs.

Connaissance mathématique = Propriété du système élève-milieu
(Brousseau 1998) (Bessot 2003) (Balacheff & Margolinas 2005)

La **géométrie dynamique**, un EIAH particulier, **micromonde**
emblématique des travaux menés dans le domaine

Micromonde : Logo et travaux de Papert (1980)

« Environnement numérique avec des règles et la possibilité de manipuler des représentations graphiques, embarquant un ensemble cohérent de concepts scientifiques et de relations, tel que les élèves puissent s'engager dans des activités d'exploration et de construction significatives par rapport aux connaissances mathématiques » (Healy & Kynigos 2010)

Géométrie Dynamique

Environnements issus de la recherche

Cabri-géomètre (Baulac, Bellemain, & Laborde, 1988) en France et le Geometer Sketchpad aux USA (Jackiw, 1989), puis d'autres logiciels originaux, Geoplan (CREEM 1990) ou Cinderella (Richter-Gebert & Kortenkamp, 1999) avant l'apparition de l'environnement gratuit GeoGebra, massivement utilisé en France et dans le monde.

Usages scolaires mondiaux

Travaux de recherche mettant en évidence le potentiel de la géométrie dynamique pour apprendre et faire apprendre les mathématiques

Des développements technologiques récents à propos de la GD

les interactions à plusieurs utilisateurs distants sur la même figure « Tabulae Colaborativo » (Bellemain 2014)

les interfaces tactiles (Soldano & Arzarello 2016)

le « multi-touch » déplacement simultané de plusieurs objets (Kortenkamp & Dohrmann 2010) (Jackiw 2013), (Sinclair et al. 2016)

Choix de conception et conséquences sur les mathématiques et leur apprentissage

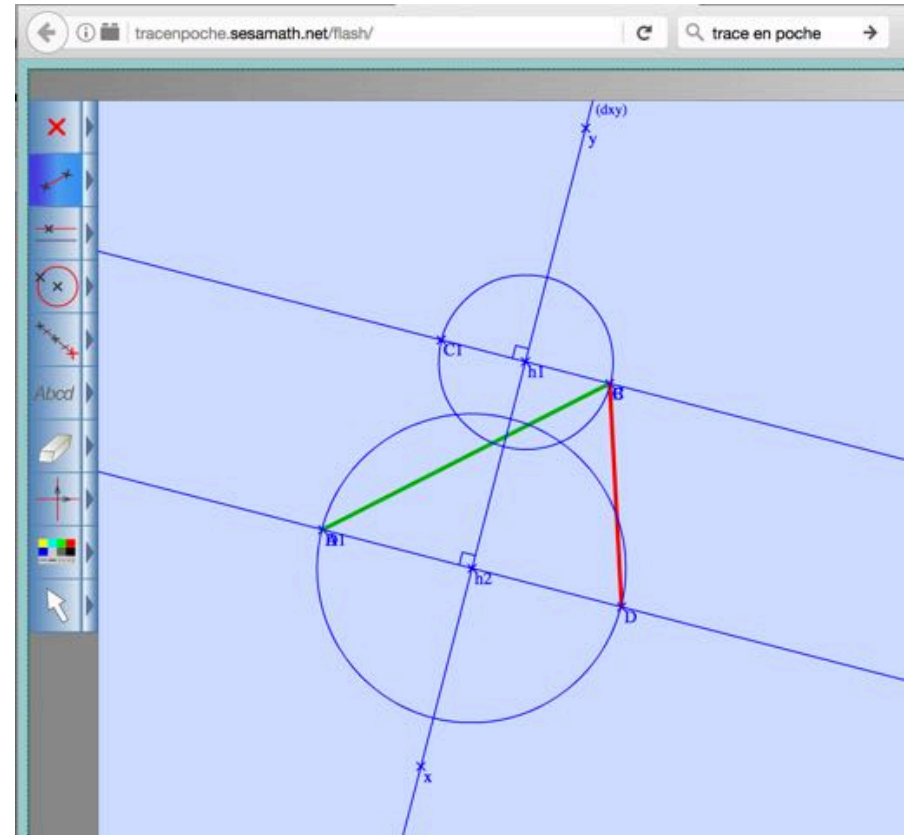
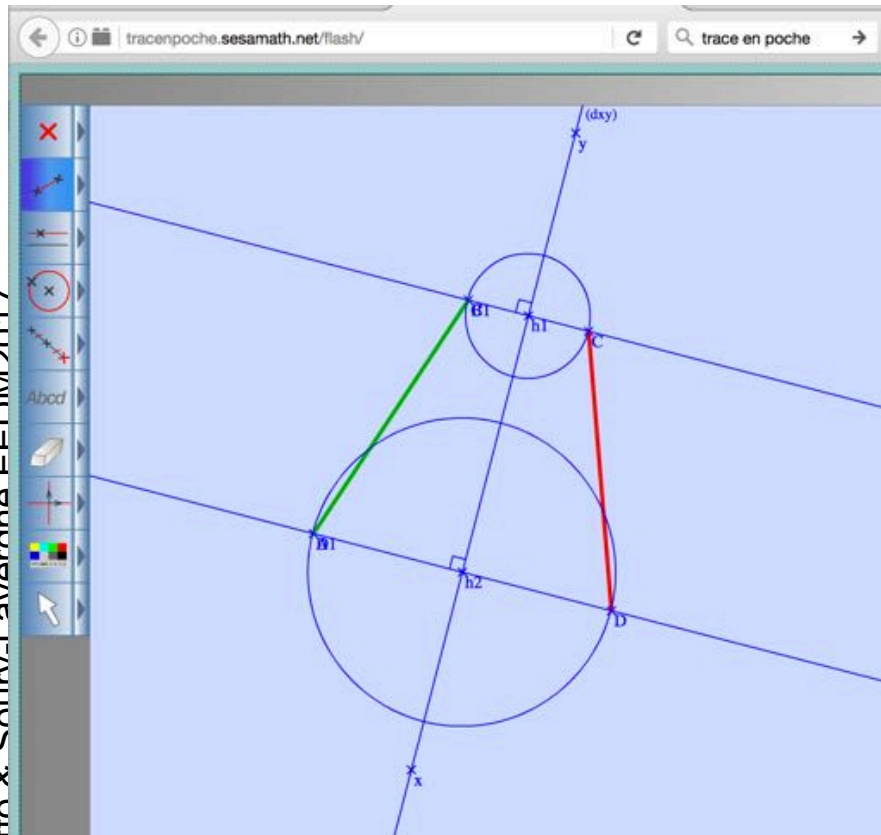
Modification de la connaissance mathématique

Exemple du point : un point A dynamique est indépendant de sa position

Conséquence : le point A est la classe des points ayant les mêmes propriétés

Problème : dans certains logiciels, confusion entre les points, par exemple les deux points d'intersection d'une droite et d'un cercle.

Confusion entre deux points construits comme intersection d'une droite et d'un cercle



Choix de conception et conséquences sur les mathématiques et leur apprentissage

Modification de la connaissance mathématique

Exemple du point : un point A dynamique est indépendant de sa position

Conséquence : le point A est la classe des points ayant les mêmes propriétés

Problème : dans certains logiciels, confusion entre les points, par exemple les deux points d'intersection d'une droite et d'un cercle.

Exemple du segment : le segment dynamique n'a pas de longueur fixe

Choix de conception et conséquences sur les mathématiques et leur apprentissage

Modification de la connaissance mathématique

Exemple du point : un point A dynamique est indépendant de sa position

Conséquence : le point A est la classe des points ayant les mêmes propriétés

Problème : dans certains logiciels, confusion entre les points, par exemple les deux points d'intersection d'une droite et d'un cercle.

Exemple du segment : le segment dynamique n'a pas de longueur fixe

Continuité versus réversibilité

Continuité lors du déplacement des objets à l'interface : nécessité pour l'utilisateur (exemple du point quelconque sur un segment)

Réversibilité de l'action : nécessité pour l'apprentissage (exemple de la bissectrice)

Impossible d'avoir simultanément la continuité et la réversibilité dans le même environnement (Kortenkamp 1999) (Gawlick 2004) (Geneves 2004)

Le déplacement, une fonctionnalité centrale de la géométrie dynamique

Etudes du déplacement

Distinction entre photo-déplacement et vidéo-déplacement (Olivero 2002), (Arzarello *et al.* 2002)

Appropriation difficile par les élèves et les enseignants (Capponi & Laborde 1994) (Soury-Lavergne 2006) (Restrepo 2008) (Sacristan 2017)

Différents instruments déplacement (Restrepo 2008)

Croisement des finalités et contraintes de l'artefact avec les finalités et contraintes mathématiques (approche instrumentale Rabadel 1995) :

- Déplacement libre, contraint ou indirect / point attrapable et point déplaçable
- Déplacement pour ajuster, déplacement mou ou guidé, déplacement exploratoire (recherche d'invariants, de trajectoires...), déplacement pour valider ou invalider

Observation des genèses instrumentales du déplacement en classe de 6^e

- Déplacement pour ajuster chez tous les élèves, déplacement pour invalider ou pour trouver une trajectoire pour quasiment tous les élèves, mais pas pour valider.
- Déplacement des objets 1D ou de dimension plus grande et pas des points

Distinction déplacement pour tester ou déplacement pour formuler une conjecture (Baccaglioni-Frank et Mariotti 2010)

Construction robuste et construction molle

En référence à un énoncé ou un théorème...

... une **construction robuste** vérifie la propriété quelque soit la position des points et des objets.

Montre « en acte » les propriétés de la figure, extériorise et contraste la variation d'un point dans un ensemble et l'invariance d'une propriété.

Ouverture de travaux sur la preuve avec utilisation du déplacement pour valider ou invalider.

... une **construction molle** vérifie la propriété localement pour certaines positions des objets.

Rend explicite la relation entre condition et conclusion, car contrôlé par l'utilisateur.

Ouverture de travaux sur la génération de conjectures avec utilisation du déplacement pour ajuster et du déplacement mou.

(Healy 2000), (Laborde 2005), (Soury-Lavergne 2011)

1.1.

Les apprentissages de la géométrie avec la géométrie dynamique

La preuve en géométrie (1)

Géométrie dynamique et médiation sémiotique

Approche théorique de la médiation sémiotique

(Bartolini Bussi & Mariotti 2008)

La géométrie dynamique comme médiateur de la notion de preuve

(Mariotti 2001, 2007, 2010)

Point d'appui : les constructions robustes

Le lien entre la construction axiomatique des théorèmes et la construction avec les outils de la GD d'une figure géométrique

Tâches pour les élèves :

1. Construction d'une figure,
2. Ecriture de la procédure de construction,
3. Justification du fait que la procédure est correcte

L'activité des élèves avec la géométrie dynamique est une phase du cycle didactique, qui prévoit travail individuel et discussion collective.

La preuve en géométrie (1)

Géométrie dynamique et médiation sémiotique

Énoncé : *Étant donné une droite r et un point P , construis une droite passant par P et perpendiculaire à r . Décris la construction et justifie géométriquement ta solution.*

Production du Groupe A (Grade 9)

- Point P
- Construction d'une droite par deux points A et B
- Cercle centre P et point A
- Intersection de deux objets : cercle rayon PA et droite AB , on obtient le point C
- Construction d'un triangle PAC
- Bissectrice (angle) APC

[La droite] est perpendiculaire parce que :

$PC=AP$ parce que les rayons d'un même cercle donc on sait que la bissectrice de CPA est la bissectrice d'un triangle isocèle qui partage le côté opposé perpendiculairement.

(Mariotti 2007)

La preuve en géométrie (2)

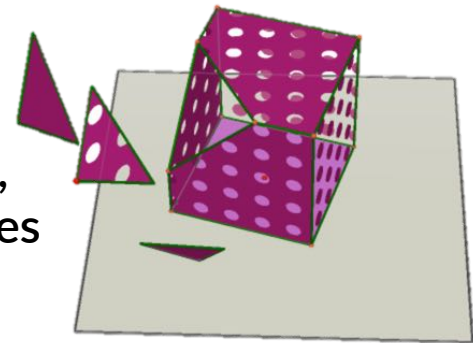
Déconstruction dimensionnelle et déconstruction instrumentale au lycée



La géométrie dynamique 3D comme moyen de rendre nécessaire le contrôle théorique de la construction

(Mithalal 2010)

La situation : reconstruire le sommet manquant d'un cube, multiplicité des stratégies possibles, fondées sur différentes déconstructions dimensionnelles, validation par déplacement.

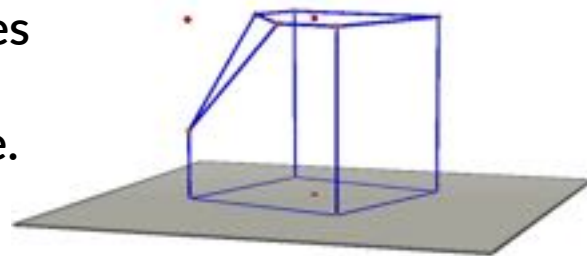
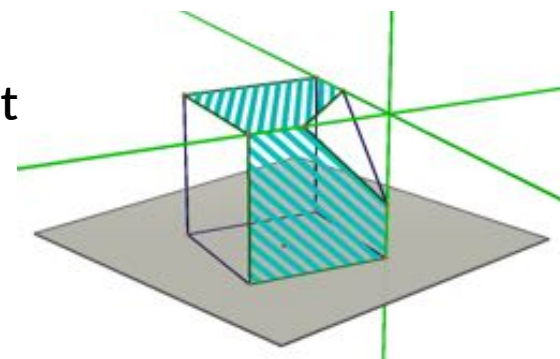


Le rôle de la géométrie dynamique

Rendre l'action possible (constructions) tout en faisant prendre conscience des limites du contrôle perceptif.

Déstabiliser la perception pour rendre nécessaire un contrôle théorique de l'action et l'entrée dans une démarche de preuve.

Mettre en relation les déconstructions dimensionnelles (Duval 2007) avec les déconstructions instrumentales impliquées par l'utilisation de la géométrie dynamique.



La preuve en géométrie (3)

Initiation au raisonnement déductif en 6^e

Deux distinctions à introduire auprès des élèves (Soury-Lavergne 2007)

Toujours vrai ou **parfois vrai** : certaines propriétés sont toujours vérifiées par la figure, quelques soient les déplacements, d'autres ne sont vérifiées que momentanément, dialectique dessin/figure (Laborde et Capponi 1994)

Propriété donnée ou **propriété déduite** : certaines propriétés sont explicites dans l'énoncé de la figure ou dans la construction, d'autres propriétés n'ont pas été données initialement à la figure.

La géométrie dynamique pour créer un questionnement chez les élèves, dévolution du problème :

Pourquoi certaines propriétés n'ont pas été données à la figure et sont pourtant toujours vraies ?

Introduction du théorème et d'un pas de démonstration par l'enseignant, en réponse à une véritable interrogation des élèves.

Une preuve justifiée par le besoin de comprendre et pas celui d'être convaincu.

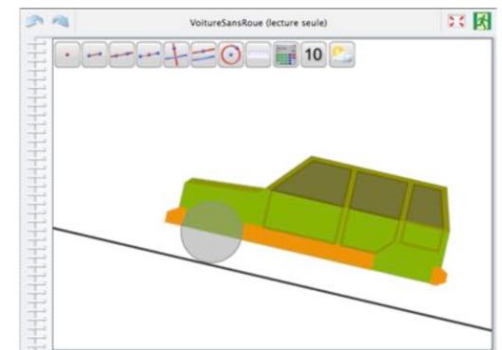
Déplacement pour valider du spatial au géométrique

Stratégies développées dans le projet MAGI pour solliciter le déplacement chez les élèves

- proposer des situations contextualisées
- concevoir une fonctionnalité spécifique dans le logiciel pour déplacer les points

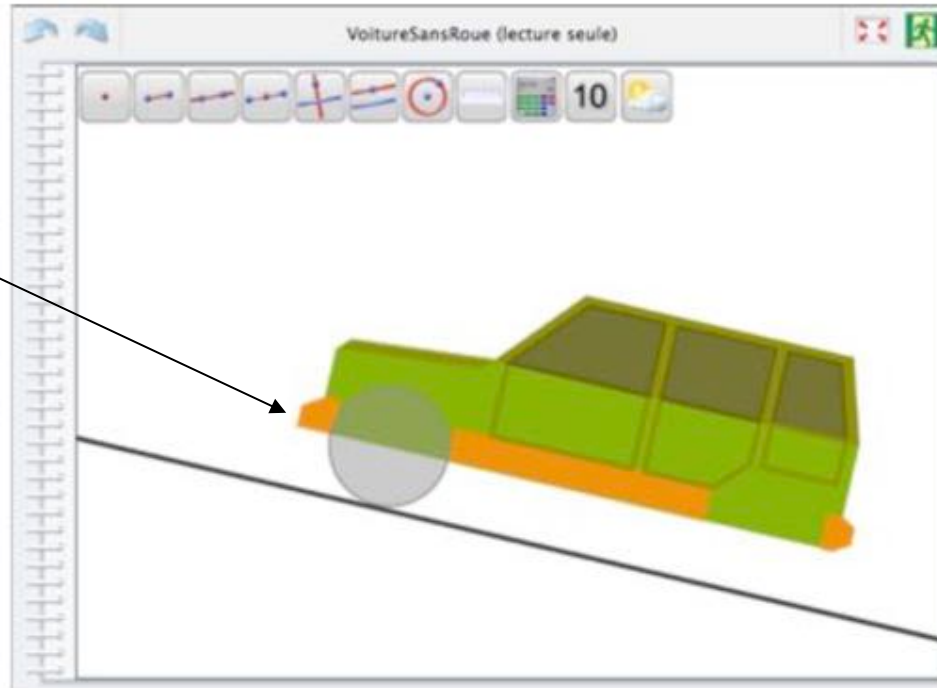
Exemple : « Pajerond » ou la « stratégie du garagiste » (Soury-Lavergne et Maschietto 2012)

- Problème : construire la roue manquante de la voiture
- Déplacement évoqué : la voiture doit rouler, la roue reste attachée à la voiture
- Connaissance spatiale et culturelle : la roue est ronde ; la roue est attachée à la voiture par son son centre
- Connaissance géométrique : la roue est un cercle et son centre est le milieu du diamètre

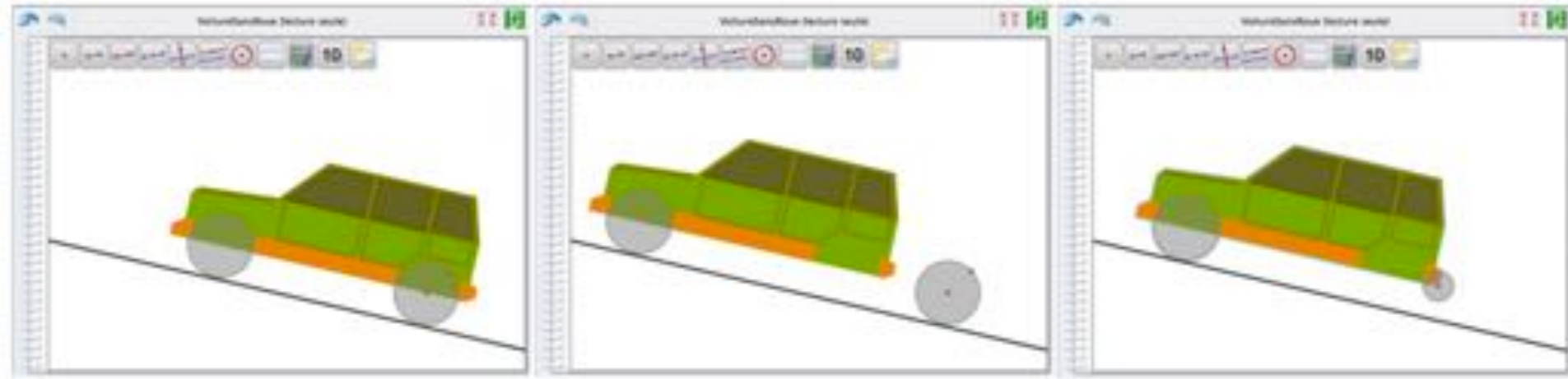


Déplacement pour valider du spatial au géométrique

Tirer pour
déplacer



ne EEDM2017



Déplacement pour explorer Maternelle et élémentaire

Usage de la géométrie dynamique pour questionner

les propriétés des figures : le cas du triangle (Sinclair & Moss 2012) (Kaur 2015),
la symétrie orthogonale (Sinclair & Kaur 2011), (Ng & Sinclair 2015).

Usage du déplacement pour

conserver les propriétés des figures,
donner à voir une transformation continue.

Références théoriques

Communication (Sfard 2008) et médiation sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti 2008) avec l'enseignant comme expert dans la discussion collective

Médiateurs visuels statiques et dynamiques

Déplacement pour explorer (1)

Maternelle et élémentaire

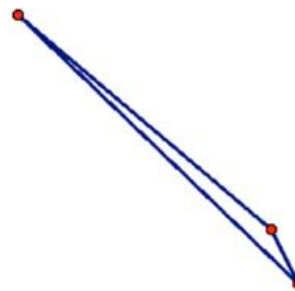
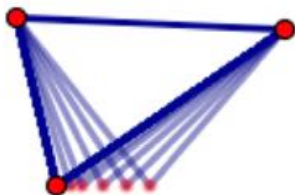
Les propriétés des figures : le cas du triangle

(Sinclair & Moss 2012) (Kaur 2015)

Travail sur un médiateur statique avec la question :

« qu'est-ce qu'un triangle ? »

Puis sur un médiateur dynamique



L'enseignant déplace les points pendant des discussions collectives

Le discours des élèves change

Déplacement pour explorer (2)

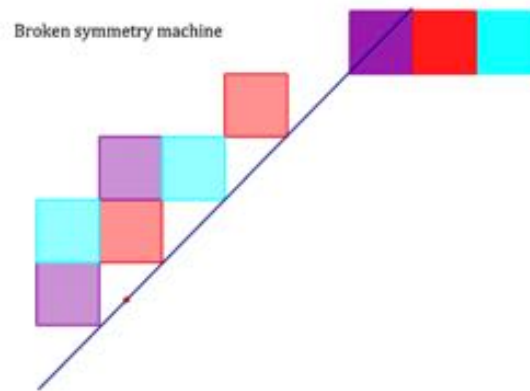
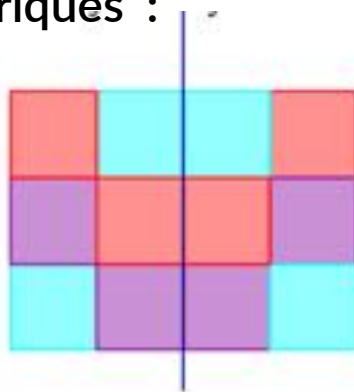
Maternelle et élémentaire

La symétrie orthogonale

(Sinclair & Kaur 2011), (Ng & Sinclair 2015)

Deux 'machines symétriques' :

'machine discrète'



'machine continue'



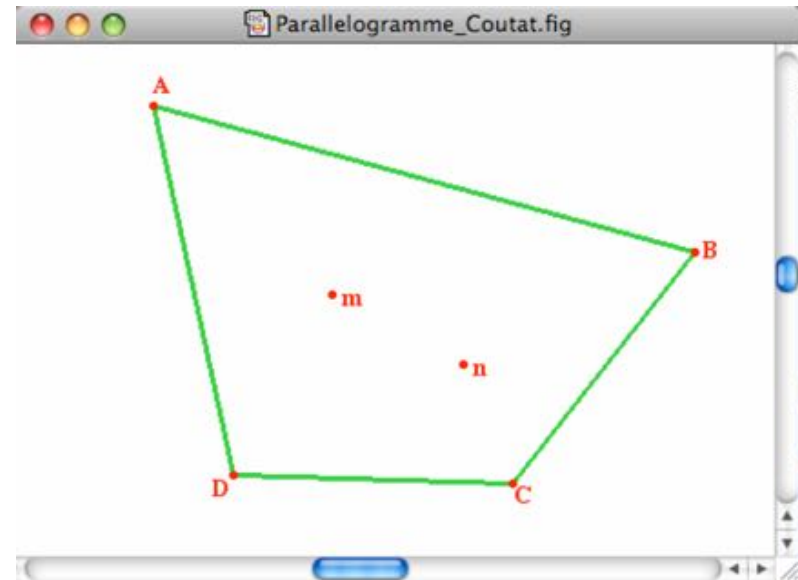
Déplacement pour expérimenter

Construction molle pour la notion de théorème

La géométrie dynamique pour introduire une dissymétrie entre hypothèses et conclusion dans un théorème (Coutat 2006)

Situation : l'élève doit déplacer le point A de façon à ce que les points M et N coïncident

Formulations et discussions collectives, cadre théorique de la médiation sémiotique (Vygotsky 1934)



Expérience de la nécessité mathématique par l'élève

L'hypothèse manquante est une action à réaliser : les diagonales ont même milieu.

La conclusion est nécessairement obtenue, indépendamment de la volonté de l'élève : le quadrilatère est un parallélogramme.

1.2.

Faire apprendre la géométrie avec la géométrie dynamique

Pourtant des pratiques décalées par rapport au potentiel...

Les usages de la géométrie dynamique (Laborde 2001) pour :

augmenter

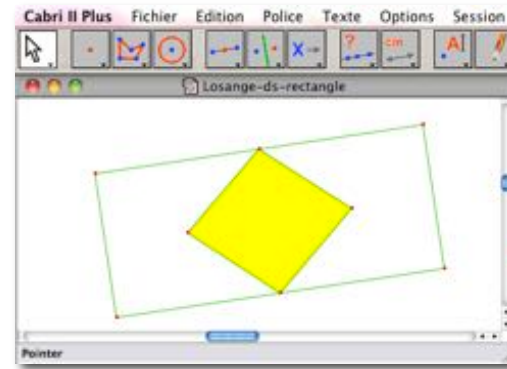
les possibilités du papier-crayon,

générer

de nouvelles tâches qui seraient impossibles sans la technologie, permettant de nouvelles significations et conceptions des mathématiques.

Complexité des genèses instrumentales de la géométrie dynamique pour faire faire des mathématiques.

Processus long à soutenir



Niveaux d'intégration de la géométrie dynamique dans les pratiques

Définition d'indicateurs pour caractériser l'intégration et l'évolution de cette intégration dans les pratiques des enseignants (Assude et al. 2006) (Assude 2007) (Grugeon-Allys 2008) (Goos & Soury-Lavergne 2010)

Etude des pratiques ordinaires des enseignants, avec divers cadres théoriques

Double approche (Abboud-Blanchard 2013)
Action conjointe (Athias 2014)

Plusieurs pistes pour accompagner et étudier le développement des usages

Amélioration des logiciels

Attention portée à la conception des environnements pour transformer les pratiques (Laborde & Laborde 2008, 2011), « *les détails comptent* » (Butler *et al.* 2009).

Développement de ressources

Les **tâches** et les **fichiers pré-conçus** (Sinclair 2003), conception de tâches (Margolinas 2013) (Leung & Bolite-Frant 2015)

La **qualité des ressources** et leur **diffusion**, projet Intergeo (2007-2010) (Kortenkamp et Laborde 2011)

Qualité d'une ressource de géométrie dynamique (Trgalova *et al.* 2009) : processus prenant en compte non seulement les caractéristiques intrinsèques de la ressource mais aussi son adéquation au contexte d'usage et sa possibilité d'évolution grâce aux retours des utilisateurs.

Processus d'évaluation et d'évolution de la qualité (Trgalova *et al.* 2011) : rôle des collectifs d'utilisateurs et prise en compte du point de vue didactique dans l'évaluation de la qualité.

Plusieurs pistes pour accompagner et étudier le développement des usages

Formation des enseignants et développement professionnel

Les stratégies et dispositifs de formation : programme Pairform@nce (Gueudet *et al.* 2011, 2012)

principes de collaboration entre pair, de conception de ressources et d'hybridation dans et hors l'école, en présence et à distance

L'accompagnement du développement professionnel par la conception collective de ressources et l'analyse de leur qualité (Soury-Lavergne *et al.* 2011)

La collaboration enseignants et chercheurs pour la formation et le développement professionnel : AProvaME (Healy *et al.* 2009), ICTML (Fugelstad *et al.* 2010), M@t.abel (Arzarello *et al.* 2012)... avec des développements théoriques comme la transposition méta-didactique (Aldon *et al.* 2013).

Le développement professionnel au croisement du travail collectif et des ressources



2. La technologie et l'articulation du spatial et du géométrique

Que faut-il faire à l'école primaire pour fonder l'apprentissage de la géométrie ?

Points de vue différents sur ce que doit être l'enseignement de la géométrie à l'école primaire, en considérant aussi la relation maternelle/élémentaire (revue de Bryant 2009)

Conceptualisation des figures géométriques dès la maternelle dans le cadre de la distinction entre « *concept image* » et « *concept definition* » (Levenson, Tirosh, & Tsamir, 2011) (Tsamir, Tirosh, Levenson, Barkai, & Tabach, 2015)

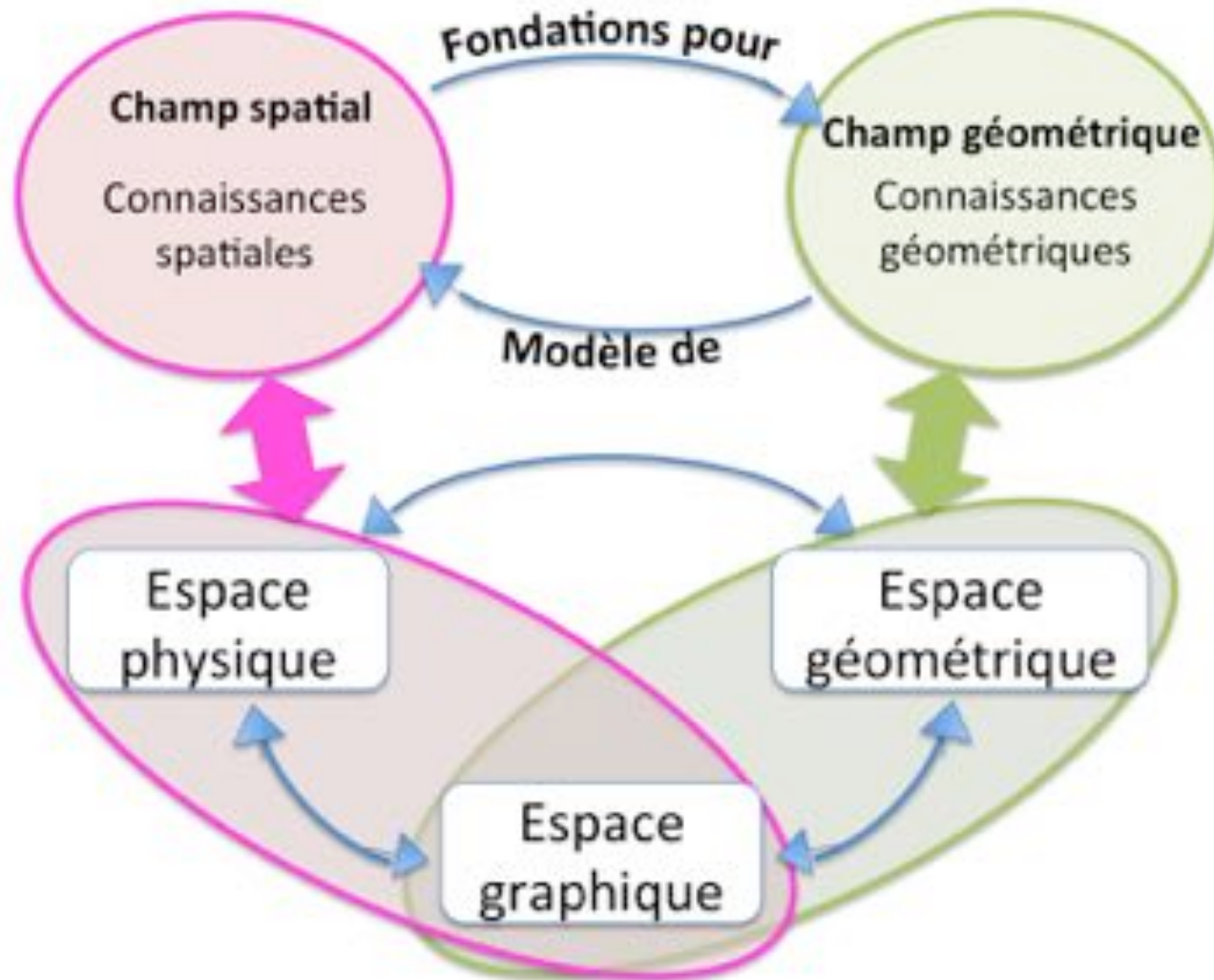
Rôle important des connaissances spatiales (Clements et Samara 2009)

Connaissances spatiales et connaissances géométriques (Berthelot & Salin 1993)

Les connaissances spatiales ne sont pas suffisamment enseignées en France (Perrin-Glorian *et al.* 2013)

La compréhension de la relation entre l'apprentissage de la géométrie et le développement des compétences spatiales reste un sujet de recherche.

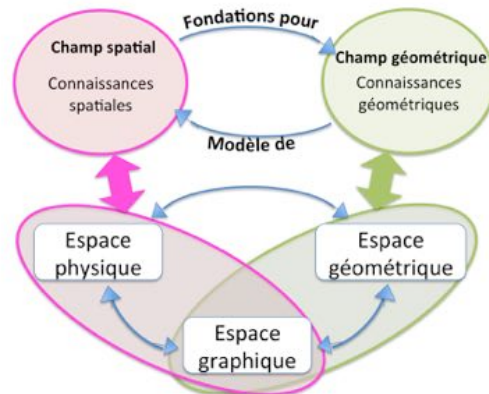
Liens entre connaissances spatiales et connaissances géométriques



Le rôle pivot de l'espace graphique

L'espace graphique comme moyen de travailler la relation entre connaissances spatiales et connaissances géométriques

Espace graphique : permet l'expérimentation et la résolution de problèmes issus de l'espace sensible ou bien de problèmes théoriques (Perrin-Glorian *et al.* 2013)



Importance du processus de schématisation (Bloch & Pressiat EE2007)

Question sur le rôle de la schématisation dans la progression de l'enseignement de la géométrie à l'école : une étape nécessaire qui 'ralentit' le cheminement souvent trop rapide vers des savoirs géométriques.

La technologie, autre pivot possible pour relier espace physique et espace géométrique

Les rétroactions avec la technologie, différentes de celles de l'espace physique et de l'espace graphique

Rétroactions du milieu dans l'interaction élève-milieu, des outils de conception de situation pour le chercheur (Laborde *et al.* 2006)

Trois types de rétroaction (Mackrell, Maschietto & Soury-Lavergne 2013)

- Rétroactions de **manipulation directe** : toutes les réponses de la technologie à l'action de l'utilisateur (affichage/masquage, son, déplacement...)
- Rétroactions de **stratégie** : les réponses de la technologie qui sont significatives du point de vue de la stratégie de résolution du problème en cours, sans donner la réponse ni modifier le problème à résoudre (changement de valeur de variable didactique)
- Rétroactions d'**évaluation** : les réponses de la technologie qui valident ou invalident la réponse de l'élève.

Spatial et géométrique, introduction de la technologie

Exemple (1) trois environnements de résolution

<http://magesi.ens-lyon.fr/>

(Rolet 2003)

Construire un carré
dans la cour,
sur le papier et
à l'écran d'un ordinateur

L'articulation des propriétés utilisées
dans les différents environnements
instrumentés permet de faire
apparaître le concept de carré.



Spatial et géométrie, introduction de la technologie

Exemple (2) la grille

Une grille pour repérer des positions et les trajectoires dans le plan

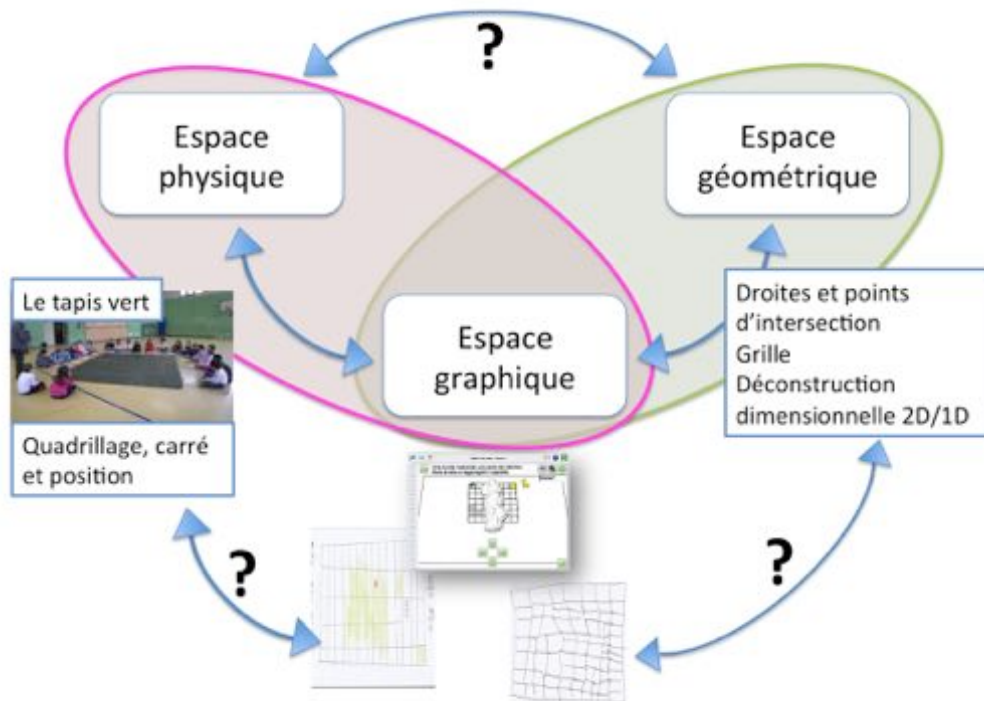
(Soury-Lavergne et Maschietto 2015)

Une situation qui permet :

- la mise en relation du champs des connaissances spatiales avec celui des connaissances géométriques
- l'articulation entre les espaces graphiques, physiques et géométriques
- l'utilisation de la technologie

Spatial et géométrique, introduction de la technologie

Exemple (2) la grille



La grille comme objet du champ spatial

- repérer la position d'un objet sur un tapis : espace physique
- mémoriser la position sur le tapis : espace graphique
- représenter le déplacement d'une grenouille dans une grille : espace graphique

La grille comme objet du champ géométrique

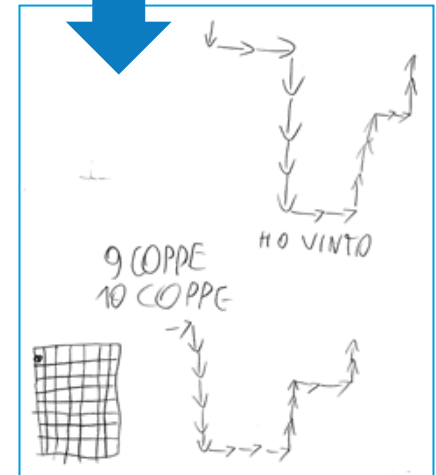
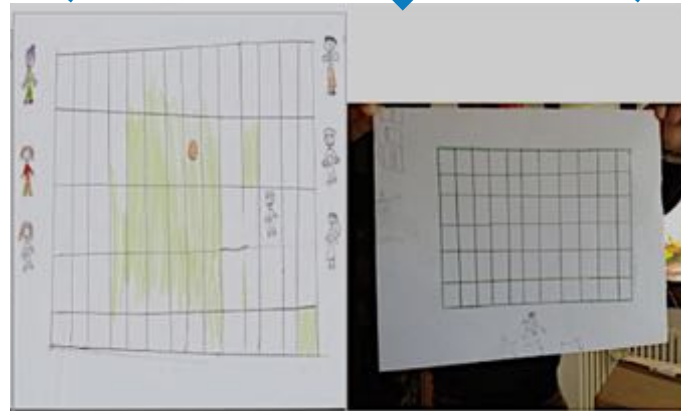
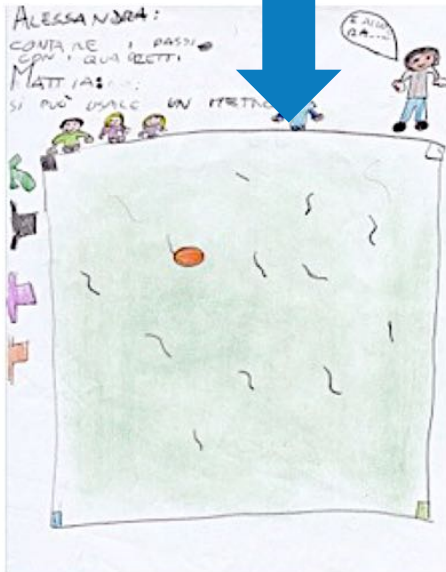
- construction d'une grille pour résoudre un problème : espace graphique et espace géométrique avec déconstruction dimensionnelle

Spatial et géométrique, introduction de la technologie

Exemple (2) la grille



Maschietto & Soury-Lavergne EEDM2017



2.2

Duo d'artefacts tangible et numérique pour apprendre et faire apprendre la géométrie

Articuler le numérique aux objets sensibles

Nécessité de manipulation concrète d'objets tangibles

et d'engagement physique pour la conceptualisation mathématique

Hypothèses sur la « cognition incarnée » (Lakoff & Nuñez 2000)

Dialectique objets sensibles et objets numériques (Dias EE 2007)

Situations qui relèvent de différents espaces, impliquant différents artefacts

Recherche d'un modèle qui permet de problématiser l'articulation entre les différents espaces et les différents artefacts et pas uniquement une succession de situations.

Artefact tangible, artefact numérique ?

Artefact tangible

Les propriétés physiques des objets : masse, couleur, mouvement, soumis à la pesanteur, visibles...

On peut les manipuler.

Artefact numérique

En opposition avec le tangible, les représentations numériques ne sont pas contraintes de la même façon par les lois physiques au cours de l'interaction avec l'utilisateur.

Pourtant, les représentations numériques

ont des propriétés physiques, sont incluses dans des objets matériels ; sont tangibles au sens de permettre que l'on opère dessus comme avec des objets.

Un continuum d'objets et de propriétés dans lequel il est possible d'extraire deux artefacts distinguables, que l'on articule l'un à l'autre : un duo d'artefacts.

Deux artefacts

Artefact tangible

complémentarités

Genèse
instrumentale
isolée

Instrument

Artefact numérique

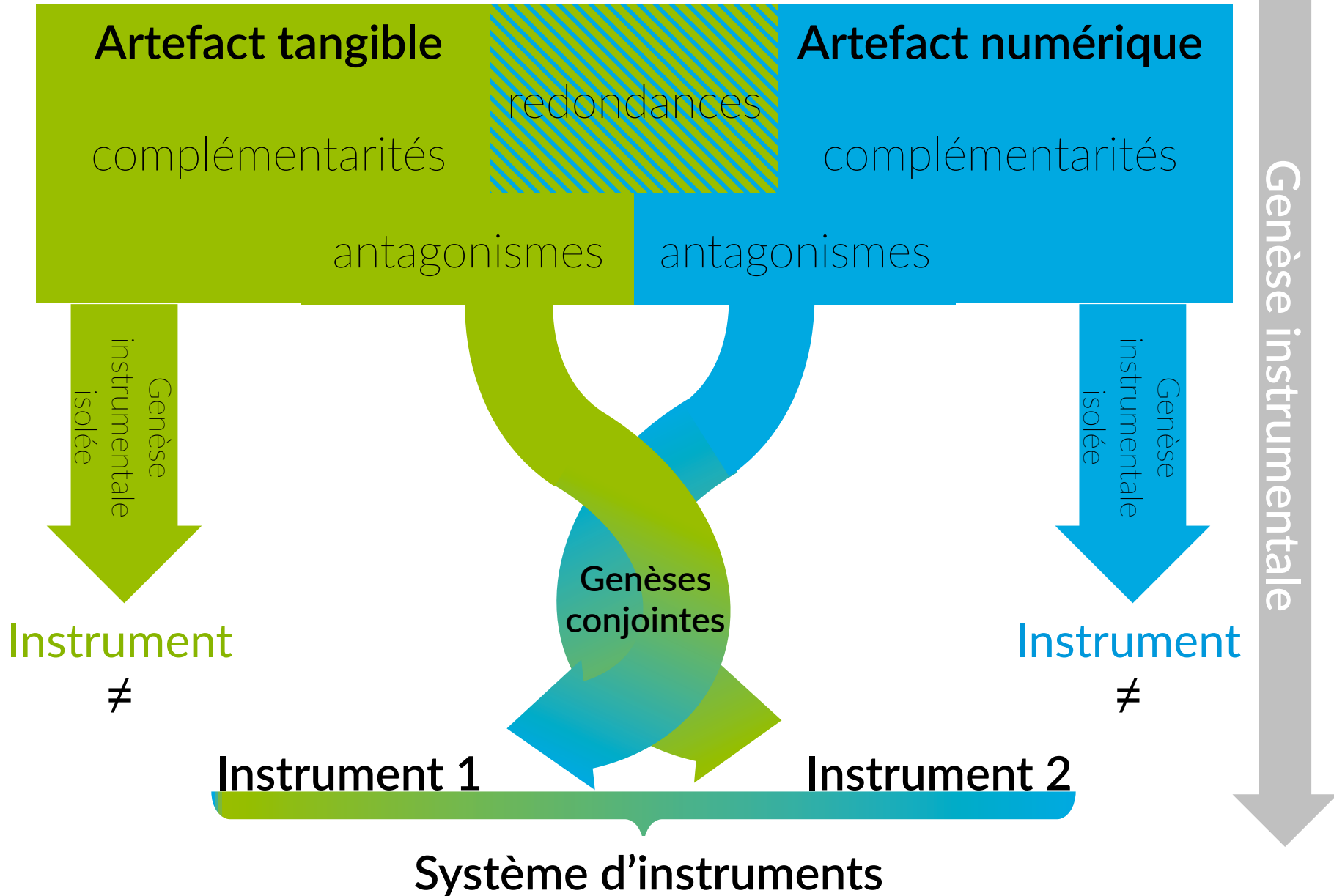
complémentarités

Genèse
instrumentale
isolée

Instrument

Genèse instrumentale

Duo d'artefacts



Un duo d'artefacts tangible et numérique pour la genèse d'un système d'instruments

Complémentarité, antagonisme, redondance

des deux artefacts

et situation didactique

pour permettre aux genèses instrumentales conjointes de se développer.

Pourquoi le tangible et le numérique pour concevoir un duo ?

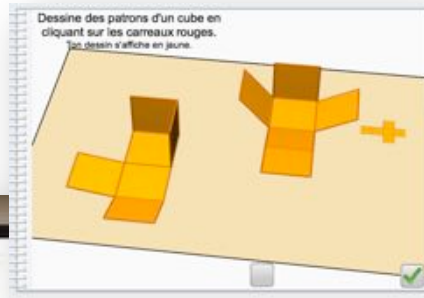
Une solution opérationnelle pour concevoir un duo avec un minimum de complémentarité, de redondance et d'antagonisme.

Chaque artefact héritant séparément des propriétés tangibles ou numériques, ils sont complémentaires. Le numérique permet une fidélité visuelle et comportementale, d'où la redondance, et des contraintes différentes dans l'interaction avec l'utilisateur, les antagonismes.

Exemple à l'école (1)

Chercher les patrons du cube (Calpe *et al.* 2014)

Passage continu 3D/2D par pliage et dépliage de polydrons puis de représentations numériques dynamiques



Avec le tangible : test des faces et de leur assemblage, validation par la réalisation effective.

Avec le numérique : test des positions relatives et recherche exhaustive des patrons possibles, validation par pliage/dépliage du patron et par comparaison entre les patrons



Exemple à l'école (2)

Construction du triangle à la règle et au compas (Voltolini 2014, 2017)

Travail sur des constructions molles de triangles, à partir de segments articulés et de traces des extrémités

Déconstruction dimensionnelle du triangle

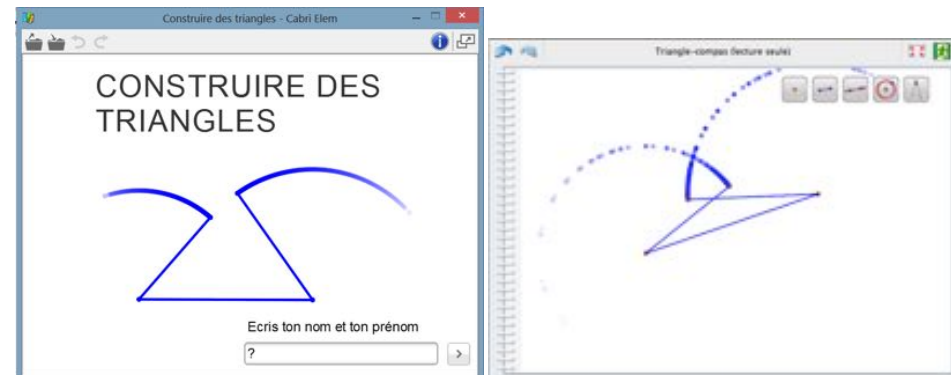
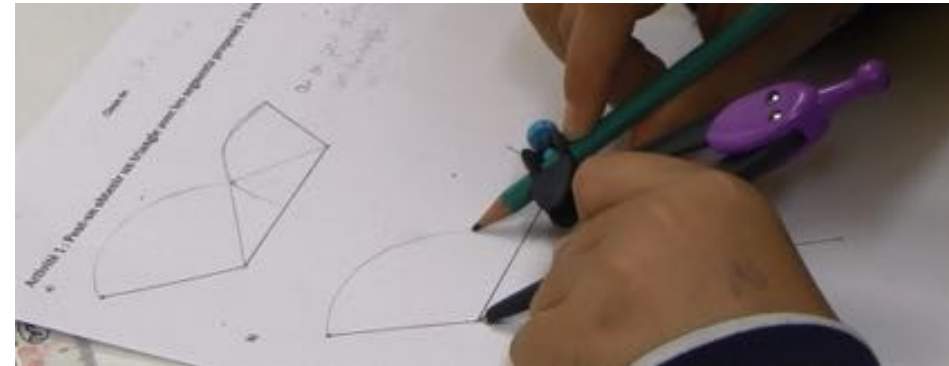
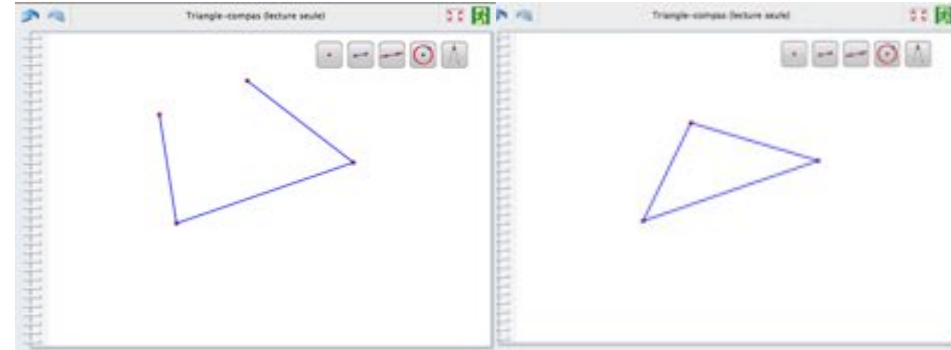
Passage de la vision 2D du triangle à une vision 1D : ligne brisée fermée

Duo d'artefacts

Artefact numérique : le déplacement par rotation d'un segment, dissocié du déplacement par translation

Artefact tangible : le compas

Genèse instrumentale conjointe du compas pour faire tourner les segments



Conclusion sur la géométrie dynamique

Diversité des usages possibles du dynamisme en géométrie

Regards sur la figure dynamique : des états statiques successifs ou bien une transformation continue au cours du déplacement

Construction robuste et construction molle : des instrumentations variées du déplacement

Exploration d'une figure et preuve : situation où la recherche porte sur les conditions et pas sur la conclusion

Complexité de la prise en compte du dynamisme dans l'activité mathématique, par les élèves et par les enseignants

Différence entre les objets géométriques dynamiques et les objets géométriques de la géométrie euclidienne : exemple du point, du segment...

Nécessité de concevoir le point comme intersection de lignes pour les constructions robustes, or la conceptualisation du point est difficile et n'est pas un objectif de l'école primaire

Quelles conséquences sur les situations didactiques, sur les apprentissages et leur appropriation par les enseignants ?

Conclusion sur le spatial et le géométrique avec la technologie

Construction des connaissances géométriques

En appui sur les connaissances spatiales et la mise en relation des trois espaces physique, graphique et géométrique

L'enjeu est de

- concevoir des situations didactiques qui amènent les élèves à construire des relations entre les trois espaces

- comprendre comment les trois espaces sont mis en relation par les élèves dans leurs stratégies

Duos d'artefacts tangibles et numériques pour problématiser

- la conception des artefacts et des situations

- les processus d'apprentissage, les genèses instrumentales conjointes et les conceptualisations associées

- l'appropriation de la technologie et des situations par les enseignants